492. Baire ノ函數ニ對スル萬有曲面

功力　金三郎（北大）

三次元空間 (x, y, z) ニ於ケル曲面 $z=f(x, y)$ が次ノ二ツノ性質ヲ有スルトキ，ソレハ Baire ノ函數ニ對スル萬有曲面デアルト云ハレル。

1) 任意ノ實數 y_0 ニツキ $y=y_0$ ナル（xz 平面ニ平行ナ）平面ト曲面トノ交ハリハ常ニ $z=\varphi(x)$ ナル一ツノ一價ノ Baire ノ函數ヲ表ハス；

2) 任意ノ一價ノ Baire ノ函數 $z=\varphi(x)$ ニツキ少ナクトモ一ツノ實數 y_0 が存在シテ $\varphi(x)\equiv f(x, y_0)$ トナル。

Baire ノ函數ノ萬有曲面ハ常ニ存在スルノデアルが更ニ曲面ニ制限ヲツケテ簡單ナ曲面ノ中デ探スト云フコトが問題デアル。

Sierpiński ハ "Sur une surface universelle pour les fonctions de Baire" Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences, tome XXXV (1933) p. 225—227 ニ於テ、カヽル萬有曲面ハ（空間 (x, y, z) ニ於ケル点集合トシテ）決シテ解析集合タリ得ナイコトヲ示シ更ニ次ノ三種類ノ集合

1) 一ツノ解析集合

2) 一ツノ補解析集合

3) 二ツノ解析集合ノ差

ノ和ヨリナル曲面ノ中ニ Baire ノ函数ノ萬有曲面ガ存在スルコトヲ示シタ。通常解析集合ヲAヲ用ヒ，補解析集合ヲCAヲ用ヒテ表ハス、スルトニツノ解析集合ノ差ハ $A_1 \cdot CA_2$ ヲ用ヒテ示サレル。

之レヲ簡單ニ $A\rho$ ヲ用ヒテ示ス、ニツノ $A\rho$ ノ集合ノ差ハ $A\rho\rho$ ヲ用ヒテ示ス。

上デ Sierpinski ガ定義シタ曲面 S ハ

$$S = A_1 + CA_2 + A_3 \cdot CA_4$$

ナル形ニ表ハサレル、依ッテコノ classification デハ．S ハ $A\rho\rho$ ノ補集合ニナル筈デアル、Sierpinski ノ上記論文ノ最後ハ

"Le problème s'il existe des surfaces universelles pour less fonctions de Baire, plus simple que la surface S (en particulier si elles peuvent être des complémentaires analytiqnes) reste ouvert."

ナル文デ結ンデアル。

ソコデ、コヽデハ Sierpinski ノコノ疑問ニ答ヘテ Baire ノ函数ニ對スル萬有曲面ハ補解析集合デアリ得ルコトヲ示サウ。

定理．補解析集合ニシテ，Baire ノ函數ニ對スル萬有曲面デアルモノガ存在スル。

証明：以下實際ニサウ云フ曲面ヲ作ッテ見セル。

三次元空間 (x, y, z) ノ中ニ，平面 (x, z) ニ含マレ

ル凡ベテノ解析集合ニ對スル萬有解析集合 $\underline{M}$ ガ存在スル。即チ $\underline{M}$ ハ空間 (x, y, z) ニ於ケル解析集合デ，(x, z) ニ於ケル任意ノ解析集合 A ニツキ實數 y_0 ガ存在シ，(x, y_0, z) ナル平面デ $\underline{M}$ ヲ切ルト切口ガ丁度 A ニナル、シカモコノ $\underline{M}$ ハ

$$\underline{M}=\sum_{\nu}\prod_{K}\underline{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$$

ナル形デ與ヘラレル。但シコヽニ $\underline{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ ハ (x, y, z) ニ於ケル閉集合デ，且ツ平面 (x, z) ニ於ケル閉集合ノ任意ノ *Souslin* 圖 $\{F_{n_1, n_2, \cdots\cdots n_K}\}$ ガ與ヘラレルトKニ無關係ナ實數 y_0 ガ存在シテ $(0, y_0, 0)$ ヲ通ル (x, z) 平面ニ平行ナ平面デ $\underline{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ ヲ切ルト丁度ソノ切口ガ $F_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ トナル。

サテ次ニ四次元空間 (x, y, z, t) ヲ考ヘル、但シ最後ノ t 軸ハ *Baire* ノ零空間 $\mathfrak{T}$ デアルトスル、*Baire* ノ零空間 $\mathfrak{T}$ ニ於テ，点 $\nu=(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots)$ ノ中最初ノK個ノ座標 $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K$ ガ定マレル点ノ全体ヲ $\delta_{n_1, n_2, \cdots\cdots n_K}$ ヲ以テ示スコトニスル、ソシテ

$$\gamma_K=\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_K}(\underline{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}\times\delta_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K});$$

$$\gamma=\prod_{K=1}^{\infty}\gamma_K$$

ヲ作ルト $\underline{M}$ ハ γ ノ (x, y, z) 空間ヘノ正射影トナル：

$$\underline{M}=\mathop{proj}_{(x,y,z)}\gamma.$$

γ_kハ四次元空間 (x, y, z, t) ニ於ケル閉集合デアル、従ッテγモ亦サウデアル。

ソコデ今度ハ次ノ lemma ヲ用ヒヨウ。

Lemma. E 及ビ S ヲ二ツノ完備 (vollständig) デ且ツ可分 (separabel) ナル metric 空間デアルトスル. γヲ空間 $E \times S$[1] ニ於ケル Borel 集合トスル。スルト E ノ点 p ニシテ $(p \times S) \cdot \gamma$ ガ一ツ且ツ唯一ツノ点ヨリ成ルガ如キ点 p ノ全体ハ空間 E ニ於ケル補解析集合デアル。

(証明ハ Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, p. 225; 及ビ Kuratowski, Topologie I. p. 259 参照)

最初 E ヲ三次元空間 (x, y, z), S ヲ Baire ノ零空間 $\mathfrak{T}$ トシテ, コノ lemma ヲアテハメル。γノ (x, y, z) ヘノ projection $\mathfrak{M}$ ノ点 p ニシテ, p ヲ通リ t 軸ニ平行ナ直線ガγト一ツ且ツ一ツニ限ッテ交ヘルが如キ p ノ全体ヲ C トスルト勿論 $C \subseteq \mathfrak{M}$ デ且ツ C ハ (x, y, z) ニ於ケル補解析集合デアル。

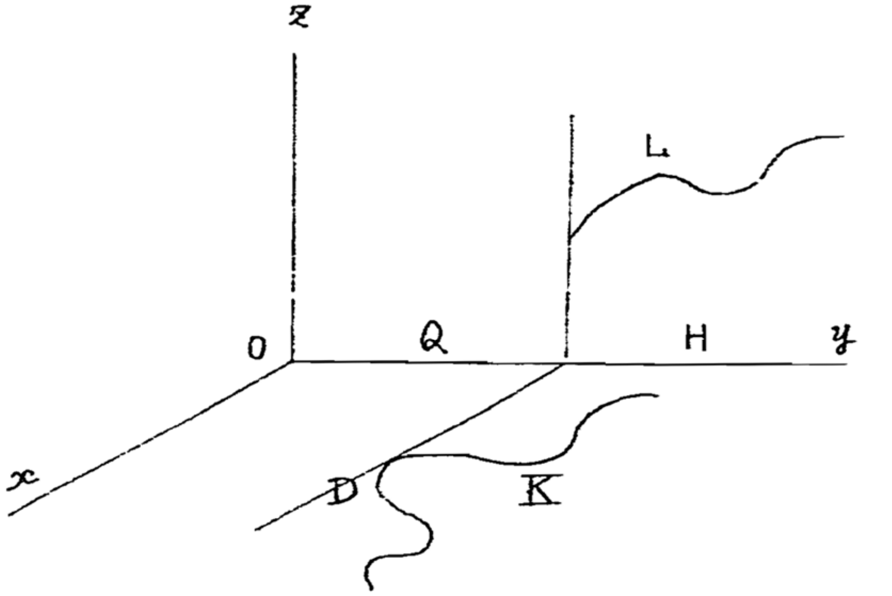
次ニ今度ハ E ヲ二次元空間 (x, y) 平面トシ, (簡単ノタメニ x 軸ヲ $\mathfrak{X}$, z 軸ヲ $\mathfrak{Z}$ デ示シ), S ヲ $\mathfrak{Z} \times \mathfrak{T}$ トシテ上ノ lemma ヲアテハメル. γノ平面 (x, y) ヘノ projection ノ点 p ニシテ, p ヲ通リ (z, t) 平面ト平行ナ平面ガγト一ツ且ツ一ツニ限ッテ交ハル点ノ全体ヲ D トスル

---

(1) $\times$ハ合成空間ヲ示ス記号

トDハ平面(x, y)ニ於ケル補解析集合デアル。

(x, y)平面ニ対スルDノ補集合ヲKトシKノy軸ヘノ正射影ヲH，y軸ニ対スルHノ補集合ヲQトスル、スルト



Kハ(x, y)平面ニ於ケル解析集合デ従ツテHハy軸ニ於ケル解析集合，Qハy軸ニ於ケル補解析集合トナル。

Qハ次ノ如キ性質ヲ有ス、

1) $y_0 \in Q$ナルトキ凡テノxニツキ，(x, y_0)ヲ通リ(z, t)平面ニ平行ナ平面トγトノ交ハリハ一ツ且ツ一ツニ限ル点ヨリナル。

2) y_0ガ若シ凡テノxニツキ(x, y_0)ヲ通リ(z, t)平面ト平行ナ平面トγトノ交ハリガ一ツ且ツ一ツニ限ル点ヨリナルトキハ$y_0 \in Q$デアル。

次ニ$X \times Q \times Z$ナル集合即チQノ各点ヲ通リxz平面ニ平行ナ平面ノ和ヲ作ルトコレハ明カニ(x, y, z)空間ニ於ケル補解析集合デアル、ヨツテ$U^* = (X \times Q \times Z) \cdot C$トオクト$U^*$ガマタ$(x, y, z)$空間ニ於ケル補解析集合トナル。

他方デHハy軸ニ於ケル解析集合デアルカラMazurkiewiczノ定理ニヨリ（Lusinノ上記著書284頁参照），(y,z)平面上ニ補解析集合Lガ存在シテHハLノprojection uniformeニナル、即チHノ各点カラz軸ニ平行線ヲ作ルトソレハLトーツ且ツーツニ限ル点デ交ハル、ソコデ$U^{**}=X\times L$ナル集合ヲ作ルトU^{**}ハ明カニ(x,y,z)ニ於ケル補解析集合デアル。

従ッテマタ$U=U^{*}+U^{**}$トオクトUガ(x,y,z)ニ於ケル補解析集合トナル。

集合Uガ吾々ノ求メル曲面ノ一ツデアル。ソレヲ証明スルタメニ凡テノ実数y_0ニツキ$(0,y_0,0)$ヲ通ル(x,z)平面ニ平行ナル平面トUトノ交ハリハ常ニアルBaireノ函数$z=\varphi(x)$ノgraphニナルコトヲ示サウ。

第一ノ場合$y_0\in H$ナルトキ。

$(y_0\times z)\cdot L$ハ(x,z)平面上デーツ且ツーツニ限ル点(y_0,z_0)ヨリナル、$(0,y_0,0)$ヲ通ル(x,z)平面ト平行ナ平面トUトノ交ハリハ同ジ平面トU^{**}トノ交ハリニ等シク，従ッテ$\varphi(x)\equiv z_0$ナル常数トナル。

第二ノ場合$y_0\in Q$ナルトキ。

コノ場合、Qノ第一ノ性質ニヨリ凡テノxニツキ点(x,y_0)ヲ通ル(z,t)平面ト平行ナ平面トΥトノ交ハリハーツ且ツーツニ限ル点ヨリナル。ヨッテ点(x,y_0)ヲ通リz軸ニ平行ナ直線トMトノ交ハリモーツ且ツーツニ限ル点ヨリナル、之ヲ$z=\varphi(x)$トオクコトガ出来ル。

シカルニ他方デ $(X\times Q\times Z)\cdot M=(X\times Q\times Z)\cdot C$ ガ成立スル。何トナレバ先ヅ $M\supseteq C$ デアルカラ

$$(X\times Q\times Z)\cdot M\supseteq(X\times Q\times Z)\cdot C$$

デアル、マタ $y_0\in Q$ トシテ $(X\times Q\times Z)\cdot M$ ノ点 $(x, y_0, \varphi(x))$ ヲ考ヘルトコノ点ヲ通ッテ z 軸ニ平行ナ直線モ亦 Y ト一ツ且ツ一ツニ限ル点デ交ハルカラ $(x, y_0, \varphi(x))$ ハ C ニ属ス。故ニ

$$(X\times Q\times Z)\cdot M=(X\times Q\times Z)\cdot C$$

デアル。

ヨッテ $z=\varphi(x)$ ノ graph ハ同時ニ $X\times y_0\times Z$ ナル平面ト M トノ交ハリデモアルシ、マタ同ジ平面ト C トノ交ハリデモアル。即チ (x, y, z) ニ於ケル解析集合デモアルシ、マタ補解析集合デモアル。Souslin ノ定理ニヨリソレハ Borel 集合デナクテハナラヌ、カクテ $z=\varphi(x)$ ハ一ツノ Baire ノ函数デアル。マタ $X\times y_0\times Z$ ト C トノ交ハリデアルコトカラ之レガ即チ $X\times y_0\times Z$ ト U^* トノ従ッテマタ U トノ交ハリデアル。

最後ニ任意ノ一價ノ Baire ノ函数 $z=\varphi(x)$ ニツキ少クトモ一ツノ實数 y_0 ガ存在シテ U ト $X\times y_0\times Z$ トノ交ハリガ丁度 $z=\varphi(x)$ ノ graph ニナルコトヲ示ソウ。
$z=\varphi(x)$ ノ class ヲ $\alpha\ (0\leq\alpha<\Omega)$ トスルト、ソノ graph I ハヤハリ class α ノ Borel 集合デアル、ヨッテソレハ disjoint ナ Souslin 圖（開集合ノ）ノ核トシテ表ハサレル、即チ I ハ

$$I = \sum_{\nu} \prod_{K} I_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$$

ナル形デ與ヘラレル。但シ $I_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ ハ平面 (x, z) ニ於ケル開集合デ且ツ自然数ノ相異ナル列 $\nu = (n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots)$ 及ビ $\nu' = (n'_1, n'_2, \cdots\cdots, n'_K, \cdots\cdots)$, $\nu \neq \nu'$ ニツキ

$$\prod_{K=1}^{\infty} I_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \cdot I_{n'_1, n'_2, \cdots\cdots, n'_K} = 0$$

デアル。

サテ *Souslin* 圖 $\{M_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}\}$ ノ性質カラ y_0 ナル実数ガ存在シテ $X \times y_0 \times Z$ ト $M_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ トノ交ハリガ K ノ如何ニ係ラズ $I_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ トナル。即チ

$$I_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} = M_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \cdot (X \times y_0 \times Z)$$

從ッテマタ

$$I = \sum_{\nu} \prod_{K} \{M_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \cdot (X \times y_0 \times Z)\}$$

$$= (X \times y_0 \times Z) \cdot \sum_{\nu} \prod_{K} M_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} = (X \times y_0 \times Z)\, M$$

カクテ I ハ $\Gamma \cdot (X \times y_0 \times Z \times T)$, (但シ T ハ *Baire* ノ零空間) 平面 $X \times y_0 \times Z$ ヘノ正射影デアル。

$(x, y_0, 0, 0)$ ヲ通リ (z, t) 平面ニ平行ナ平面ト Γ トノ交ハリハ一ツ且ツ一ツニ限ル点ヨリナル。ヨッテ $(x, y_0, 0)$ ハ D ニ屬ス。シカモコノコトハ凡テ x ニツキ成立スル。Q ノ第二ノ性質ニヨリ $y_0 \in Q$ デアル。他方デ $\sum \prod I_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ ガ *disjoint* デアルコトカラ $(x, y_0, \varphi(x))$ ハ C ニ

属シ $\overline{U}$ ト $X \times y_0 \times Z$ トノ交ハリガ丁度 $z=\varphi(x)$ ノ graph ニナル。

カクテ $\overline{U}$ ガ吾々ノ求メル曲面デアル。　　　— 以上 —

會計報告

昭和十一年一月—六月

摘要	收入	支出
會費及寄附金	¥413.70	
前期不足金		¥14.07
プリント代		348.15
送料		45.04
丸善ヘノ支拂		25.20
雜費		2.64
不足金	21.40	
計	¥435.10	¥435.10

會費ノ集リガ悪ク，本年六月ニプリント社ニ拂フベキ所ヲヤツト此度拂ヘル樣ニナツタ次第デアリマス。御迷惑乍ラ今後ハ可成滯納トナラヌ樣ニ御願ヒシマス。